ANALIZA FUNKCJONALNA I TOPOLOGIA

Lista 2 - Funkcjonały liniowe i ich rozszerzenia

1. Dla danej podprzestrzeni liniowej Y przestrzeni liniowej unormowanej X (nad ciałem rzeczywistym lub zespolonym) wyznaczyć przynajmniej dwa różne funkcjonały $\varphi \in X^*$, takie że $\mathrm{Ker}\varphi = Y$, gdzie
   (a) $X = c$, $Y = c_0$,
   (b) $X = \ell^1$, $Y = \{(x_1, x_2, \ldots) \in X : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 3x_1\}$,
   (c) $X = C[0,1]$, $Y = \{f \in X : f(0) = 2f(1)\}$,
   (d) $X = C[-1,1]$, $Y = \{f \in X : \int_a^1 f(t)dt = \int_{-1}^1 f(t)dt\}$, gdzie $a \in (-1,1)$.

2. Niech $X = \mathbb{R}^2$, niech Y będzie jej podprzestrzenią liniową oraz $\varphi \in Y^*$. Opisać wszystkie rozszerzenia $\Phi \in X^*$ funkcjonału φ postaci
   (a) $\varphi(x_1, 0) = 2x_1$ dla $Y = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$,
   (b) $\varphi(x_1, 2x_1) = -x_1$ dla $Y = \{(x_1, 2x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$.

3. Niech $X = \mathbb{R}^2$ z normą $\|\,.\,\|$. Wyznaczyć X^* oraz $\|\,\varphi\,\|$ dla każdego $\varphi \in X^*$, korzystając ze wzoru na normę przekształcenia liniowego, gdy za normę $\|\,.\,\|$ przyjmie się każdą z trzech norm: $\|\,.\,\|_\infty$, $\|\,.\,\|_1$ oraz $\|\,.\,\|_2$.

4. Niech $X = \mathbb{R}^2$ z normą $\|\,.\,\|$ i niech $Y = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$. Dla ustalonego $a \in \mathbb{R}$ definiujemy $\varphi \in Y^*$ wzorem
$$\varphi(x_1, 0) = ax_1.$$
   Korzystając z poprzedniego zadania, wyznaczyć rozszerzenie $\Phi \in X^*$, takie że $\|\,\Phi\,\| = \|\,\varphi\,\|$ dla trzech rozważanych tam norm.

5. Stosując Lemat Hahna-Banacha, pokazać, że istnieje liniowy funkcjonał Φ na ℓ^∞ nad ciałem $\mathbb{R}$, taki że
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \Phi(\{a_n\}) \le \limsup_{n\to\infty} a_n$$
   definiując odpowiedni funkcjonał na przestrzeni ciągów zbieżnych c.

6. Pokazać, że każdy ograniczony funkcjonał liniowy φ na podprzestrzeni M przestrzeni Hilberta H posiada jednoznaczne rozszerzenie Φ do ograniczonego funkcjonału liniowego na H o tej samej normie co φ. Czy konieczne jest założenie, że M jest domknięta?

7. Niech X będzie niezerową unormowaną przestrzenią liniową. Pokazać, że istnieje niezerowy funkcjonał $\varphi \in X^*$.

8. Stosując wniosek z Lematu Hahna-Banacha (o funkcjonale niezerowym), pokazać, że jeżeli X jest unormowaną przestrzenią liniową, to dla każdego wektora $x \neq 0$ z tej przestrzeni istnieje $\varphi \in X^*$, taki że $\|\varphi\| = 1$ oraz $\varphi(x) = \|x\|$.

9. Pokazać, że jeżeli dwa wektory x, y unormowanej przestrzeni liniowej X spełniają $\varphi(x) = \varphi(y)$ dla każdego $\varphi \in X^*$, to $x = y$ (zastosować wynik zadania poprzedniego). Czyli, jeżeli $x \neq y$, to istnieje $\varphi \in X^*$, taki że $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ (czyli, X^* rozdziela punkty w UPL).

10. Stosując wniosek z Lematu Hahna-Banacha, pokazać, że jeżeli φ jest niezerowym funkcjonałem liniowym na przestrzeni liniowej X, to przestrzeń tę można rozłożyć na sumę prostą postaci
$$X = \mathrm{Ker}\varphi \oplus Y$$
gdzie Y jest jednowymiarową przestrzenią liniową.

11. Stosując wniosek z Lematu Hahna-Banacha, pokazać, ze jeżeli X jest UPL poraz Y jest jej podprzestrzenią liniową, która nie jest gęsta w Y, to istnieje funkcjonał liniowy $\Phi \in X^*$ taki, że $\Phi(y) = 0$ dla każdego $y \in Y$, ale $\Phi \neq 0$.

12. Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem zespolonym i niech φ będzie zespolonym funkcjonałem liniowym na X. Traktując X jako przestrzeń liniową nad ciałem rzeczywistym, pokazać że
    (a) funkcjonały $\varphi_1(x) = \mathrm{Re}\varphi(x)$ oraz $\varphi_2(x) = \mathrm{Im}\varphi(x)$, gdzie $x \in X$, są rzeczywistymi funkcjonałami liniowymi,
    (b) $\varphi(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix) = \varphi_2(ix) + i\varphi_2(ix)$ dla $x \in X$,
    (c) jeżeli X jest unormowana i φ jest ograniczony, to φ_1, φ_2 są ograniczone oraz $\| \varphi \| = \| \varphi_1 \| = \| \varphi_2 \|$.

R. Lenczewski